JOURNAL OF ALGEBRA 80, 314–322 (1983)

Sur les algèbres absolument valuées qui vérifient l'identité $(x, x, x) = 0$

MOHAMED LAMEI EL-MALLAH*

Institut de Mathématiques, Université du Languedoc, Place Eugène Bataillon, 34060 Montpellier Cedex

Communicated by E. Kleinfeld

Received May 5, 1981

Let A denote a prehilbert absolute valued real algebra such that $(x, x, x) = 0$ for all $x \in A$; for this algebra we obtain the same results we have previously obtained for the flexible absolute valued algebra. Our main theorem is: A has a finite dimension 1, 2, 4 or 8, and is isotopic to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ or C. One of the results concerning the isomorphism between A and $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, C^*, $\mathbb{H}$ or C shows that if for every two idempotents e_1 and e_2 in A, $((e_1, e_2)) \neq \frac{1}{4}$, then A is isomorphic to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, C^*, $\mathbb{H}$ or C. The example of infinite dimensional Hilbert absolute valued algebra given by Urbanik and Wright indicates that the assumption, $(x, x, x) = 0$ for all $x \in A$, is essential.

PRÉLIMINAIRES

Par la suite, A désigne une algèbre absolument valuée sur les réels. Nous ne supposons pas que A soit de dimension finie, ni unitaire. On dira que A préhilbertienne si A est munie d'un produit scalaire. On note $((x, y))$ le produit scalaire des éléments x et y et on sait, par définition, que $((x, x)) = \|x\|^2$. Si $e \neq 0$ est un idempotent de A, il est facile de voir que $((ex, ey)) = ((xe, ye)) = ((x, y))$ car $\|e\| = 1$. Si x et y sont deux éléments de A tels que $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x - y\| = 2$, alors $x + y = 0$ car $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 4$. Nous utilisons les définitions et les notations données dans [2]. On rappelle que dans l'algèbre commutative C^* il existe exactement trois idempotents non-nuls e, e_1 et e_2 vérifiant $e + e_1 + ee_1 = 0$, $e + e_2 + ee_2 = 0$, $e_1 + e_2 + e_1e_2 = 0$, $ee_1 = e_2$, $ee_2 = e_1$ et $e_1e_2 = e$. $\{e, e_1\}$, $\{e, e_2\}$ et $\{e_1, e_2\}$ sont des bases de C^* sur $\mathbb{R}$. Si l'algèbre A vérifie l'identité

* Present address: Cairo University, Faculty of Science, Department of Mathematics, Cairo, Giza, Egypt.

0021-8693/83/020314–09$03.00/0

$(x, x, x) = 0$, c'est-à-dire $(x, x^2) = 0$ pour tout élément x de A, il est facile de voir que,

$$(xy + yx, x) + (x^2, y) = 0 \tag{1}$$

quels que soient x et y dans A.

On note $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et C respectivement les $\mathbb{R}$-algèbres des réels, des complexes, des quaternions et de Caley. Let lettres α, β, γ, δ, λ, α_i,... désigneront toujours des éléments du corps de base $\mathbb{R}$.

LEMME 1.1. *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre abolument valuée préhilbertienne et soient x et y deux éléments linéairement indépendants dans A tels que $xy = yx$. Si z est un élément de A commute avec x et y, alors z est dans le sous-espace $[x, y]$.*

En effet, on peut supposer que $\|x\| = \|y\| = 1$, car $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $[x, y] = [x/\|x\|, y/\|y\|]$. Supposons que z ne soit pas dans $[x, y]$, donc il existe un élément $\omega \in [x, y, z]$ tel que $\|\omega\| = 1$ et ω est orthonormal à x et y. D'autre part, $\|\omega^2 - x^2\| = \|\omega - x\| \, \|\omega + x\| = 2$ et $\|\omega^2 - y^2\| = \|\omega - y\| \, \|\omega + y\| = 2$. Comme $\|\omega^2\| = \|x^2\| = \|y^2\| = 1$, donc $\omega^2 + x^2 = 0$ et $\omega^2 + y^2 = 0$. Or, A étant sans diviseurs de zéro, on aurait $y = x$, ou $y = -x$, absurde car x et y sont linéairement indépendants.

2. ALGÈBRES ABSOLUMENT VALUÉES PRÉHILBERTIENNES QUI VÉRIFIENT L'IDENTITÉ $(x, x, x) = 0$

Dans tout ce qui suit, A désignera une $\mathbb{R}$-algèbre absolument valuée préhilbertienne telle que $(x, x, x) = 0$ pour tout élément x de A.

LEMME 2.1. *Soit B une sous-algèbre de A engendrée par n éléments non-tous nuls et commutent entre eux. Alors B est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou C^*.*

Soit D l'ensemble de ces n générateurs et supposons qu'il existe dans D deux éléments x et y linéairement indépendants. Puisque A est munie d'un produit scalaire, donc $[x, y] = [a, b]$ où a et b sont deux éléments orthonormaux dans A. Comme $ab = ba$, donc $\|a^2 - b^2\| = \|a - b\| \, \|a + b\| = 2$ et comme $\|a^2\| = \|b^2\| = 1$, donc $a^2 + b^2 = 0$. D'autre part, $0 = ((a + b)^2, a + b) = 2(ab, a + b)$ et $0 = ((a - b)^2, a - b) = -2(ab, a - b)$. Il s'ensuit que $(ab, a) = 0$ et $(ab, b) = 0$. D'après le lemme 1.1, $ab \in [a, b]$. Comme $a^2 + b^2 = 0$ et $(a^2, a) = 0$, alors $(b^2, a) = 0$ et comme $(b^2, b) = 0$ et d'après le lemme 1.1, $b^2 \in [a, b]$ et $a^2 \in [a, b]$. Il vient que $[a, b]$ est une algèbre commutative de dimension 2, donc $[x, y] = [a, b]$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ ou C^* (cf. [1, théorème 3]). D'après le lemme 1.1, $D \subseteq [x, y]$, c'est-à-dire $B = [x, y]$. Supposons maintenant qu'il n'existe pas dans D deux éléments linéairement indépendants et soit $0 \neq z \in D$, donc $B = A(z)$. Si z et z^2 sont linéairement indépendants et puisque $zz^2 = z^2 z$, alors la démonstration que $A(z)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ ou C^* est analogue à celle donnée ci-dessus. Si $z^2 = \alpha z$, alors l'élément $\alpha^{-1} z$ est un idempotent et dans ce cas $A(z)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

LEMME 2.2. *S'il existe dans A une sous-algèbre B isomorphe à $\mathbb{C}$ et une sous-algèbre D isomorphe à C^*, alors B et D ne contiennent aucun idempotent nonnul commun.*

Supposons qu'il existe un idempotent $e \neq 0$ dans B et D. Il existe alors dans A un élément i et un idempotent $e' \neq e$ tels que $B = [e, i]$, $ei = ie = i$, $i^2 = -e$ et $D = [e, e']$ avec $e + e' + ee' = 0$. Puisque e commute avec $e' + i$, alors $A(e, e' + i)$ est de dimension 1 ou 2 (cf. lemme 2.1), c'est-à-dire $e(e' + i) = \beta e + \gamma(e' + i)$, d'où $eé + i = \beta e + \gamma(e' + i)$, i.e., $-e - e' + i = \beta e + \gamma(é + i)$. Si $\gamma \neq 1$, $i \in [e, e']$ absurde, et si $\gamma = 1$, $-2e' = (1 + \beta)e$, absurde aussi car e et e' sont linéairement indépendants.

LEMME 2.3. *Soient e_1 et e_2 deux idempotents de A tels que $e_1 e_2 \neq e_2 e_1$. Alors il existe un idempotent non-nul e dans A tel que $(e_1 - e_2)^2 = \lambda e$ et e commute avec e_1 et e_2. De plus, $A(e, e_1)$ et $A(e, e_2)$ sont isomorphes à C^* et e est le seul idempotent non-nul de A qui commute avec e_1 et e_2.*

En effet, $(e_1 - e_2)^2 \neq 0$ car A est sans diviseurs de zéro. Comme $0 = ((e_1 + e_2)^2, e_1 + e_2) = (e_1 e_2 + e_2 e_1, e_1 + e_2)$, donc $((e_1 - e_2)^2, e_1 + e_2) = 0$ et comme $((e_1 - e_2)^2, e_1 - e_2) = 0$, il vient que $((e_1 - e_2)^2, e_1) = 0$ et $((e_1 - e_2)^2, e_2) = 0$. Puisque $e_1 e_2 \neq e_2 e_1$ et d'après le lemme 2.1, $A((e_1 - e_2)^2, e_1)$ et $A((e_1 - e_2)^2, e_2)$ sont de dimension 2. Si $\dim_{\mathbb{F}}(A((e_1 - e_2)^2)) = 2$, alors $A((e_1 - e_2)^2, e_1) = A((e_1 - e_2)^2) = A((e_1 - e_2)^2, e_2)$ et il résulte que $e_1 e_2 = e_2 e_1$. Ceci nous montre que $\dim_{\mathbb{F}}(A((e_1 - e_2)^2)) = 1$ et, par suite, il existe un idempotent e dans A tel que $(e_1 - e_2)^2 = \lambda e$ et e commute avec e_1 et e_2. D'après le lemme 2.1 et puisque $e_1 e_2 \neq e_2 e_1$, alors $A(e, e_1)$ et $A(e, e_2)$ sont isomorphes à C^*. Supposons qu'il existe un idempotent non-nul e_3 dans A commute avec e_1 et e_2 et montrons que $e_3 = e$. En effet, $A(e_3, e_1)$ et $A(e_3, e_2)$ sont isomorphes à C^* car $e_1 e_2 \neq e_2 e_1$, c'est-à-dire $e_3 + e_1 + e_3 e_1 = 0$ et $e_3 + e_2 + e_3 e_2 = 0$, donc $e_3(e_1 - e_2) = e_2 - e_1$. De même $e(e_1 - e_2) = e_2 - e_1$. Il s'ensuit que $(e_3 - e)(e_1 - e_2) = 0$. Puisque A est sans diviseurs de zéro et $e_1 \neq e_2$, alors $e_3 = e$.

LEMME 2.4. *Dans A, il n'existe pas des sous-algèbres B et D telles que B soit isomorphe à $\mathbb{C}$ et D soit isomorphe à C^*.*

Supposons qu'il existe $B = [e_0, j]$ telle que $e_0^2 = e_0$, $j^2 = -e_0$ et

$e_0 j = je_0 = j$ et $D = [e', e'']$ telle que $e'^2 = e'$, $e''^2 = e''$ et $e' + e'' + e'e'' = 0$. Si $e_0 e' = e' e_0$, alors $A(e_0, e')$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou C^* (cf. lemme 2.1), ce qui est impossible d'après le lemme 2.2. Supposons donc que $e_0 e' \neq e' e_0$, il existe alors un idempotent e dans A tel que $A(e, e_0)$ est isomorphe à C^* (cf. lemme 2.3) ce qui est aussi impossible d'après le lemme 2.2.

THÉORÈME 2.5. *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre absolument valuée préhilbertienne telle que $(x, x, x) = 0$ pour tout élément x de A et supposons qu'elle contienne une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$. Alors A est isomorphe à $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou C.*

D'après les lemmes 2.1 et 2.4, $A(x)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour tout élément $x \neq 0$ de A. Soient e_1 et e_2 deux idempotents non-nuls dans A et démontrons que $e_1 = e_2$; c'est-à-dire il existe un seul idempotent non-nul e dans A et dans ce cas il résulte que $e \in A(x)$ pour tout $0 \neq x \in A$, donc e est l'élément unité de A et le théorème 1 de [1] nous dit que A est isomorphe à $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou C. En effet, si $e_1 e_2 \neq e_2 e_1$, alors il existe dans A une sous-algèbre isomorphe à C^* (cf. lemme 2.3) ce qui est impossible d'après le lemme 2.4. Donc $e_1 e_2 = e_2 e_1$ et il s'ensuit que $A(e_1, e_2)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (cf. lemmes 2.1 et 2.4), i.e., $e_1 = e_2$.

COROLLAIRE 2.6. *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre absolument valuée préhilbertienne telle que $(x, x, x) = 0$ pour tout élément x de A et supposons qu'il existe un élément b de A tel que b et b^2 soient linéairement indépendants et $(b, b, b^2) = 0$. Alors A est isomorphe à $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou C.*

En effet, d'après le lemme 2.1, $A(b)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ ou C^*. Or, par des calculs simples, on peut voir que les seuls éléments non-nuls de C^* qui vérifient l'identité $(x, x, x^2) = 0$ sont γe_i où γ parcourant $\mathbb{R}$ et e_i est l'un de ses trois idempotents. Donc $A(b)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

THÉORÈME 2.7. *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre absolument valuée préhilbertienne telle que $(x, x, x) = 0$ pour tout élément x de A et supposons qu'elle ne contienne pas une sous-algèbre isomorphe à C^*. Alors A est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou C.*

En effet, s'il existe une sous-algèbre de A isomorphe à $\mathbb{C}$, alors A est isomorphe à $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou C. Sinon, donc pour tout $0 \neq x \in A$, $A(x)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$. Soient e_1 et e_2 deux idempotents dans A. Il vient que $e_1 e_2 = e_2 e_1$, car si $e_1 e_2 \neq e_2 e_1$, le lemme 2.3 nous montre qu'il existe une sous-algèbre de A isomorphe à C^*. D'après le lemme 2.1, $A(e_1, e_2)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, i.e., $e_1 = e_2$. Il s'ensuit qu'il existe un seul idempotent $e \neq 0$ de A et $x \in A(e)$ pour tout x de A; c'est-à-dire A est isomorphe à $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 2.8. *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre absolument valuée préhilbertienne telle que $(x, x, x) = 0$ pour tout élément x de A. Si les idempotents de A commutent entre eux, alors A est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, C^*, $\mathbb{H}$ ou C.*

En effet, en utilisant le théorème 2.5 et le lemme 2.1, la démonstration est analogue à celle du théorème 3.4 dans [2].

LEMME 2.9. *Soient e_1 et e_2 deux idempotents distincts dans A. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$e_1$commute avec e_2,*

(ii) $\|e_1 + e_2\| = 1$, *i.e.*, $((e_1, e_2)) = -\frac{1}{2}$.

En effet, en utilisant les lemmes 2.1 et 2.3, la démonstration est analogue à celle du lemme 3.5 dans [2].

Dans [2], nous avons utilisé la condition "flexible" pour démontrer le lemme 3.1. Tandis que dans le présent article le lemme 2.3 sert á démontrer des résultats analogues á ceux de l'article [2], qui par la suite serviront á démontrer le lemme 3.1 de [2] pour les algèbres préhilbertiennes qui vérifient l'identité $(x, x, x) = 0$, et ce lemme va nous aider á demontrer le résultat principal, á savoir A est de dimension finie 1, 2, 4 ou 8 et isotope à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou C.

LEMME 2.10. *Soient e_1 et e_2 deux idempotents dans A tels que $(e_1, e_2) \neq 0$. Il existe alors un idempotent e dans A tel que $(e_1, e_2)^2 = \alpha e$ et e commute avec e_1 et e_2. De plus $A(e, e_1)$ et $A(e, e_2)$ sont isomorphes à C^*.*

Tout d'abord, il est évident que l'idempotent e sera le même que celui du lemme 2.3 (cf. lemme 2.3). L'existence de deux idempotents e_1 et e_2 dans A nous montre qu'il n'existe pas dans A une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$ (cf. théorème 2.5). D'après l'identité 1, $(ex + xe - x, e) = 0$ pur tout élément x et tout idempotent e dans A. Écrivons $y = e_1(e_1, e_2) + (e_1, e_2)e_1 - (e_1, e_2)$, $z = e_2(e_1, e_2) + (e_1, e_2)e_2 - (e_1, e_2)$ et démontrons que $y = 0$ et $z = 0$. En effet, e_1 est orthogonal à y, car $(((e_1, e_2), e_1)) = ((e_1e_2 - e_2e_1, e_1)) = ((e_2, e_1)) - ((e_2, e_1)) = 0$, $(((e_1, e_2)e_1, e_1)) = (((e_1, e_2), e_1)) = 0$ et $((e_1(e_1, e_2), e_1)) = (((e_1, e_2), e_1)) = 0$. Comme $(y, e_1) = 0$, alors $A(y, e_1)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou C^*. Si $y = \delta e_1$, on a $0 = ((y, e_1)) = \delta$, i.e., $y = 0$. Supposons maintenant que $A(y, e_1)$ soit isomorphe à C^*, donc $y = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e'$ où e' est un idempotent commute avec e_1 et $e' + e_1 + e'e_1 = 0$. Montrons que e' est orthogonal à y. En effet, $(((e_1, e_2), e')) = -((e_1e_2 - e_2e_1, e'e_1)) = -((e_1e_2, e_1e')) + ((e_2e_1, e'e_1)) = -((e_2, e')) + ((e_2, e')) = 0$, $((e_1(e_1, e_2), e')) = -((e_1(e_1, e_2), e_1e')) = -(((e_1, e_2), e')) = 0$ et $(((e_1, e_2)e_1, e')) = -(((e_1, e_2)e_1, e'e_1)) = -(((e_1, e_2), e')) = 0$. Puisque $((e_1, e')) = -\frac{1}{2}$ (cf. lemme 2.9), donc $0 = ((y, e_1)) = \alpha_1 - \frac{1}{2}\beta_1$ et $0 = ((y, e')) = -\frac{1}{2}\alpha_1 + \beta_1$, et il s'ensuit que

$\alpha_1 = \beta_1 = 0$ et $y = 0$. De même on peut démontrer que $z = 0$ en utilisant e_2 à la place de e_1. Puisque $y = 0$, donc (e_1, e_2) commute avec $e_1(e_1, e_2) + (e_1, e_2)e_1$. En utilisant l'identité 1 donc $(e_1, e_2)^2$ commute avec e_1. De même $(e_1, e_2)^2$ commute avec e_2 car $z = 0$. D'après le lemme 2.1 et comme $(e_1, e_2) \neq 0$, alors $A((e_1, e_2)^2, e_1)$ et $A((e_1, e_2)^2, e_2)$ sont de dimension 2. Si $\dim_{\mathbb{R}}(A((e_1, e_2)^2)) = 2$, alors $A((e_1, e_2)^2, e_1) = A((e_1, e_2)^2, e_2)$, c'est-à-dire $e_1 e_2 = e_2 e_1$, absurde. Donc $\dim_{\mathbb{R}}(A((e_1, e_2)^2)) = 1$ et il vient que $(e_1, e_2)^2 = \alpha e$. Il est évident que $A(e, e_1)$ et $A(e, e_2)$ sont isomorphes à C^*.

LEMME 2.11. *Soit e un idempotent non-nul de A et soient x et y deux éléments de A. Si e commute avec x et y, alors e commute avec le produit xy.*

D'après le lemme 2.1, $A(e, x)$ et $A(e, y)$ sont isomorphes à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou C^*. Le cas où $A(e, x) \simeq \mathbb{C}$ ou $A(e, y) \simeq \mathbb{C}$ nous donne le résultat d'après le théorème 2.5. Le lemme est encore évident, si $A(e, x) \simeq \mathbb{R}$ ou $A(e, y) \simeq \mathbb{R}$. Il nous reste á examiner le cas où $A(e, x) \simeq C^*$ et $A(e, y) \simeq C^*$. On écrit $A(e, x) = [e, e_1]$ et $A(e, y) = [e, e_2]$ où e_1 et e_2 sont deux idempotents non nuls de A. Si $e_1 e_2 = e_2 e_1$, on a le résultat cherché (cf. lemme 2.1). Supposons donc que $e_1 e_2 \neq e_2 e_1$. D'après les lemmes 2.3 et 2.10, on a $(e_1 - e_2)^2 = \lambda e$ et $(e_1, e_2)^2 = \alpha e$. Il s'ensuit que e commute avec $e_1 e_2 + e_2 e_1$ et $e_1 e_2 - e_2 e_1$, donc commute avec $e_1 e_2$ et $e_2 e_1$, i.e. e commute avec xy.

LEMME 2.12. *Soient e, e' deux idempotents de A, l'algèbre A(e, e') est de dimension finie.*

En effet, si $ee' = e'e$, l'algèbre $A(e, e')$ est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou C^*. Supposons donc que $ee' \neq e'e$, alors il existe un idempotent non nul e'' dans $A(e, e')$ qui commute avec e et e' (cf. lemme 2.3 ou 2.10) donc qui commute avec tout élément de $A(e, e')$ (cf. lemme 2.11). Comme $A(e, e')$ vérifie l'identité (x, x, x) pour tout x dans $A(e, e')$, le théorème 2.1 de [2] nous montre que $A(e, e')$ est de dimension finie.

THÉORÈME 2.13. *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre absolument valuée préhilbertienne telle que $(x, x, x) = 0$ pour tout élément x de A. Donc A est de dimension* 1, 2, 4 *ou* 8 *et isotope à* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ *ou C.*

En utilisant les lemmes 2.1 et 2.12 et le théorème 2.5, la démonstration est analogue á celle du théorème 3.8 dans [2].

THÉORÈME 2.14. *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre absolument valuée préhilbertienne telle que $(x, x, x) = 0$ pour tout élément x de A et telle que quels que soient les idempotents e_1, e_2 dans A, $e_1 e_2$ commute avec $e_2 e_1$. Alors A est isomorphe à* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, C^*, $\mathbb{H}$ *ou C.*

En effet, il suffit de démontrer que $(e_1 e_2, e_2 e_1) = 0$ entraine que

$(e_1, e_2) = 0$ (cf. théorème 2.8). Supposons que $(e_1, e_2) \neq 0$. Il vient que A ne contient pas une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$ (cf. théorème 2.5) et il existe un idempotent e dans A tel que e commute avec e_1 et e_2, $(e_1 - e_2)^2 = \lambda e$ et e commute avec $e_1 e_2$ et $e_2 e_1$ (cf. lemmes 2.3 et 2.11). Si $e_1 e_2 = \delta e$, donc $\delta = 1$ ou -1, car $\|e_1 e_2\| = \|e\| = 1$. Si $e_1 e_2 = e$, $((e_2, e_1)) = ((e_1 e_2, e_1)) = ((e, e_1)) = -\frac{1}{2}$ et le lemme 2.9, nous montre que $(e_2, e_1) = 0$. Si $e_1 e_2 = -e$, donc $((e_2, e_1)) = ((e_1 e_2, e_1)) = -((e, e_1)) = \frac{1}{2}$ et $((e_1 e_2, e)) = -1$. Or le fait que $e + e_1 + ee_1 = 0$ nous montre que $-1 = ((e_1 e_2, e)) = -((e_1 e_2, e_1 + e_1 e))$ $= -((e_2, e_1)) - ((e_2, e)) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$. Cette contradiction nous montre que $e_1 e_2$ et e sont linéairement indépendants. De même on peut démontrer que $e_2 e_1$ et e sont linéairement indépendants. Donc on peut écrire $e_1 e_2 = \alpha_1 e + \beta_1 x$ et $e_2 e_1 = \alpha_2 e + \beta_2 y$ où $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$ et x, y sont orthogonaux à e et $\|x\| = \|y\| = 1$. Puisque $ex = xe$, $\|x^2 - e\| = \|x - e\| \, \|x + e\| = 2$, donc $x^2 + e = 0$. Puisque $A(e, x)$ est isomorphe à C^* (cf. lemme 2.1), donc $ex = \delta_1 e + \delta_2 x$, d'où $0 = ((x, e)) = ((ex, e)) = \delta_1$, donc $ex = x$ ou $ex = -x$ car $1 = \|ex\| = \|x\|$. Or, si $ex = x$, on a que $A(e, x)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, absurde, donc $ex = -x$. De même $y^2 + e = 0$ et $ey = -y$. Comme $(e_1 e_2, e_2 e_1) = 0$, donc $(x, y) = 0$. D'autre part, $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ et il s'ensuit que $y = x$ ou $y = -x$ car A est sans diviseurs de zéro. De plus $((e_1 e_2 - e_2 e_1, e)) = -((e_1 e_2 - e_2 e_1, e_1 + ee_1)) = 0$ nous montre que $\alpha_1 = \alpha_2$ et le fait que $1 = \|e_1 e_2\|^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2$ et $1 = \|e_2 e_1\|^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2$ nous montre que $\beta_2 = \pm\beta_1$. Il vient que $e_1 e_2 = \alpha_1 e + \beta_1 x$ et $e_2 e_1 = \alpha_1 e + \beta_1 x$ ou $e_2 e_1 = \alpha_1 e - \beta_1 x$. Supposons que $e_2 e_1 = \alpha_1 e - \beta_1 x$. Il s'ensuit que $e_1 e_2 + e_2 e_1 = 2\alpha_1 e$. Or, $e_1 + e_2 - e_1 e_2 - e_2 e_1 = \lambda e$, c'est-à-dire $e_1 + e_2 = (\lambda + 2\alpha_1) e$ donc $(e_1, e_2) = 0$. Donc $(e_1 e_2, e_2 e_1) = 0$ entraine que $(e_1, e_2) = 0$ quels que soient les idempotents e_1 et e_2 dans A.

THÉORÈME 2.15. *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre absolument valuée préhilbertienne telle que $(x, x, x) = 0$ pour tout élément x de A telle que quels que soient les idempotents e_1, e_2 dans A, $((e_1, e_2)) \neq \frac{1}{4}$. Alors A est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, C^*, $\mathbb{H}$ ou C.*

S'il existe dans A une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$, alors A est isomorphe à $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou C. Supposons donc qu'il n'existe pas une sous-algèbre de A isomorphe à $\mathbb{C}$. Soient e' et e'' deux idempotents dans A et supposons que $e'e'' \neq e''e'$. Donc il existe un idempotent non-nul e dans A commute avec e' et e'' (cf. lemme 2.3 ou 2.10). Les algèbres $A(e, \acute{e} + e'')$ et $A(e, e' - e'')$ sont isomorphes à C^*, car si $e' + e'' = \lambda_1 e$ ou $e' - e'' = \lambda_2 e$, donc $e'e'' = e''e'$. Il résulte que $e' + e'' = \alpha e + \beta e^*$ et $e' - e'' = \alpha_1 e + \beta_1 e_0$ où e^* et e_0 deux idempotents de A commutent avec e et $\beta \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$. D'autre part, $-1 = ((e' + e'', e)) = \alpha - \beta/2$ d'où $\beta = 2(\alpha + 1)$ et $0 = ((e' - e'', e)) = \alpha_1 - \beta_1/2$, d'où $\beta_1 = 2\alpha_1$. Donc $e' + e'' = \alpha e + 2(\alpha + 1) e^*$ et $e' - e'' = \alpha_1(e + 2e_0)$. Comme $e' + e''$ et e sont orthogonaux à $\acute{e} - e''$, donc

$0 = 2\alpha_1(\alpha + 1)((e^*, e + 2e_0)) = 2\alpha_1(\alpha + 1)(-\frac{1}{2} + 2((e^*, e_0)))$. Puisque $2\alpha_1(\alpha + 1) \neq 0$, donc $((e^*, e_0)) = \frac{1}{4}$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse, donc $e'e'' = e''e'$. Nous avons démontré que les idempotents de A commutent entre eux et d'après le Théorème 2.8, on a le résultat cherché.

Remarque. Nous avons vu que si A est une $\mathbb{R}$-algèbre absolument valuée flexible (cf. [2]) ou bien préhilbertienne et vérifie l'identité $(x, x, x) = 0$, l'existence d'une sous-algèbre de A isomorphe à $\mathbb{C}$ entraine que A soit isomorphe à $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou C. Nous allons donner un exemple d'une $\mathbb{R}$-algèbre absolument valuée B^* de dimension 4 dans laquelle il existe une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$, de plus il existe dans cette sous-algèbre un élément a tel que a et a^2 soient linéairement indépendants, $ax = xa$ pour tout $x \in B^*$ et B^* n'est pas isomorphe à $\mathbb{H}$. En effet, le Professeur E. Kleinfeld nous a fait savoir qu'il existe des algèbres absolument valuées flexibles de dimension 4 et 8 qui ne sont pas isomorphes à $\mathbb{H}$ ou C (cf. [3]). Soit maintenant B l'algèbre absolument valuée flexible de dimension 4 donnée dans [3]. Dans cette algèbre il existe un idempotent e' commute avec les éléments de B (cf. [3], en effet , $e' = -e$ dans l'exemple) et comme on a déjà vu dans [2] que $A(e', x)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou C^* pour tout x dans B. Évidemment, il existe $x_1 \in B$ tel que $A(e', x_1)$ soit isomorphe à C^*, c'est-à-dire $A(e', x_1) = [e', e_1]$, $e_1^2 = e_1$ et $e' + e_1 + e'e_1 = 0$. Sur l'espace vectoriel soujacent à B on définit une nouvelle structure d'algèbre B^* en définissant la multiplication par,

$$x \circ y = e_1(xy) \qquad \text{pour } x \text{ et } y \text{ parcourant } B.$$

L'algèbre B^* est absolument valuée car $\|e_1\| = 1$, et il est évident que e' commute avec les éléments de B^*. D'autre part,

$$e_1 \circ e_1 = e_1$$

et

$$e_1 \circ e' = e_1(e_1 e') = -e_1(e_1 + e') = -e_1 - e_1 e' = -e_1 + e_1 + e' = e',$$

c'est-à-dire $[e', e_1]$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ dans B^* et e_1 est l'élément unité de $[e', e_1]$. L'algèbre B^* ne vérifie pas l'identité $(x, x, x) = 0$ car si elle l'a vérifie, alors e' et e'^2 commutent avec les éléments de B^* et $B^* = [e_1, e']$ (cf. la démonstration du théorème 2.1 dans [2]) ce qui est impossible. Cet exemple nous montre également que si A est une algèbre absolument valuée et $a \in A$, alors $ax = xa$ pour tout $x \in A$ n'entraine pas nécessairement que $a^2x = xa^2$ pour tout $x \in A$ (cf. [2, théorème 2.4]).

Bibliographie

1. K. Urbanik and F. B. Wright, Absolute valued algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 861–866.
2. M. L. El-Mallah and A. Micali, "Sur les dimensions des algèbres absolument valuées, *J. Algebra* **68**, n° 2 (1981), 237–246.
3. S. Okubo, Pseudo-quartenion and Pseudo-octinion algebras, *Hadronic J.* **1** (1978), 1250–1278.